



航空动力学报
Journal of Aerospace Power
ISSN 1000-8055, CN 11-2297/V

《航空动力学报》网络首发论文

题目：电液伺服阀压电双晶片力马达组件数学建模
作者：凌杰，彭洪涛，李蕴琪，张文星，康佳豪，朱玉川
DOI：10.13224/j.cnki.jasp.20250241
收稿日期：2025-05-21
网络首发日期：2025-09-02
引用格式：凌杰，彭洪涛，李蕴琪，张文星，康佳豪，朱玉川. 电液伺服阀压电双晶片力马达组件数学建模[J/OL]. 航空动力学报.
<https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20250241>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

电液伺服阀压电双晶片力马达组件数学建模

凌杰¹, 彭洪涛¹, 李蕴琪¹, 张文星², 康佳豪², 朱玉川¹

(1. 南京航空航天大学 机电学院, 南京 210016;

2. 中国航空工业集团公司 西安飞行自动控制研究所, 西安 710065)

摘要: 压电双晶片替代力矩马达, 能够提升电液伺服阀的响应速度, 简化先导级结构, 提高系统的零位稳定性和可靠性。目前压电性电液伺服阀力马达组件模型无法从物理机理层面解释不同约束条件对输出特性的影响。基于分段建模思想与等效原理开展数学建模研究。针对压电型射流偏转板电液伺服阀先导级设计了等效力马达组件, 并开展不同约束条件下输出特性测试。结果显示: 静态输出方面, 当伸出长度减小 4 mm 时, 前置级力马达组件位移减小幅值最大, 为 27.7 μm ; 动态输出方面, 当伸出长度减小 4 mm 时, 前置级力马达组件谐振幅值下降最多, 为 1.9 dB; 谐振频率增幅最大, 为 15.9%。建立了包含迟滞模型、线性动力学模型及液动力模型 3 部分的数学模型, 进行了静/动态输出特性仿真。通过仿真与实验对比分析可知: 静态输出特性方面, 仿真迟滞为 11.6%, 实验迟滞为 11.2%, 两者方均根误差为 2.5 μm ; 动态输出特性方面, 在驱动频率为 600 Hz 且不同约束条件下, 仿真与实验最大方均根误差为 5.7 μm , 说明数学模型准确。研究为力马达组件结构与优化提供理论指导。

关键词: 电液伺服阀; 压电双晶片; 线性动力学; 液动力; 迟滞非线性; 数学模型

中图分类号: V241

文献标志码: A

Mathematical modeling of a piezoelectric bimorph actuated force motor assembly for electrohydraulic servo valve

LING Jie¹, PENG Hongtao¹, LI Yunqi¹, ZHANG Wenxing², KANG Jiahao²,
ZHU Yuchuan¹

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China

2. Xi'an Flight Automatic Control Research Institute, Aviation Industry Corporation of China, Limited, Xi'an Shaanxi 710065, China)

Abstract: Replacing the torque motor with a piezoelectric bimorph improves electrohydraulic servo valve response, simplifies the pilot stage, and enhances stability. Yet existing actuator models fail to explain constraint effects on output. This paper develops a mathematical model using piecewise and equivalent principles. An equivalent actuator was designed for the jet-deflector stage, and tests under different constraints were conducted. Results show that a 4 mm reduction in extension led to the largest static displacement decrease of 27.7 μm , the maximum dynamic resonance amplitude drop of 1.9 dB, and resonance frequency increase of 15.9%. A model including hysteresis, linear dynamics, and hydrodynamics was then built, with static/dynamic simulations validated against experiments. In static output, simulated hysteresis was 11.6% vs. experimental 11.2% (RMS error 2.5 μm); in dynamic output at 600 Hz, the maximum RMS error was 5.7 μm , confirming accuracy. This study offers theoretical guidance for actuator design and optimization.

Key words: electrohydraulic servo valve; piezoelectric bimorph; linear dynamics; hydrodynamics; hysteresis non-linearity; mathematical model

收稿日期: 2025-05-21

基金项目: 航空科学基金 (20220007052001)。

作者简介: 凌杰 (1990—), 男, 副教授, 博士, 研究方向为精密驱动与控制。E-mail: meejing@nuaa.edu.cn

20250241-1

电液伺服阀是电液伺服控制系统的重要组成部分^[1], 具备抗负载刚度大、输出功率高、响应速度快和控制精度高的特点^[2], 在航空航天等伺服控制领域得到了广泛的应用^[3]。然而, 传统电液伺服阀在实际应用中仍面临可靠性和高频响应方面的技术瓶颈^[4]。作为前置级核心驱动组件的力矩马达, 因其结构复杂、易受电磁干扰且响应速度受限^[5], 常出现零偏、啸叫及动态响应不足等问题^[6], 这不仅影响了伺服阀的长期可靠性, 也限制了其在高频需求场合中的应用^[7]。近年来, 随着智能材料技术的快速发展, 压电双晶片执行器以其响应速度快^[8]、结构紧凑及抗电磁干扰等优势^[9], 逐渐成为替代传统驱动技术的重要方向^[10]。压电双晶片与反馈杆装配成力马达组件, 凭借抗电磁干扰、结构紧凑的优势, 能简化先导级结构^[11], 从而改善系统的零位稳定性和长期可靠性^[12]; 凭借快速响应的优势, 能够提升电液伺服阀的动态性能^[13]。压电材料在航空航天等对重量、体积和可靠性要求高的领域展现出可观的应用潜力^[14]。为了阐明力马达组件工作原理, 描述不同设计参数与约束条件对组件输出性能指标之间的关系, 需对组件开展数学建模工作。

压电双晶片的建模主要采用 Hammerstein 结构, 把模型近似成非线性环节和动态线性环节的级联^[15]。目前的研究主要集中在非线性迟滞建模上。迟滞非线性模型分为唯象模型和唯物模型两类^[16]。唯象模型通过拟合滞环曲线形状建模, 使用广泛, 但参数无物理意义无法指导设计^[17]。唯物模型基于迟滞非线性的内在产生机理构建物理解析模型, 其参数具有实际物理含义, 主要包括 Jiles-Atherton (J-A) 模型^[18]。唯物模型提供了深入的物理机制解释, 因而可用于指导物理构型设计与参数优化。针对压电材料非线性和输入输出依赖记忆特性影响定位精度的问题, Lei 等人^[19]将 J-A 模型转化为神经网络结构, 与非线性自回归外生输入神经网络相结合, 首次提出了基于 J-A 模型的混合神经网络模型。针对压电材料非线性的机电耦合问题, Radu 等人^[20]使用 J-A 模型进行切换, 结合有限元分析, 模拟压电材料极化场和应变场滞后响应的孔隙率, 以确定局部电和机械响应系数以及有效介电和压电常数。Maryam

等人^[21]分析了磁性材料的物理参数变化对磁滞曲线的影响, 并通过有限元法和 COMSOL 软件模拟磁滞回线、磁通密度与磁场分量的关系。针对 J-A 模型数值积分和常微分方程的求解困难的问题, Varun 等^[22]用随机优化技术探索 J-A 模型参数的设计空间为优化算法提供了更窄的参数范围, 从而减少了识别最佳参数所需的时间。当前针对压电双晶片的建模研究主要聚焦于其迟滞非线性特性, 线性动力学部分通常采用传递函数辨识方法进行描述。然而, 在电液伺服阀前置级应用中, 需要综合考虑执行器与反馈杆之间的耦合作用, 对组件整体进行数学建模。

压电型射流偏转板电液伺服阀这一构型最早由巴斯大学 Dhinesh 等^[23-24]提出。针对力马达组件的建模, 其研究团队基于 Hammerstein 结构, 采用 Bouc-Wen 模型和质量刚度阻尼模型分别描述迟滞非线性和线性动力学部分。但模型没有考虑液动力的影响, 且模型的相关参数基本以黑箱辨识为主, 没有进行物理解析建模, 对其数学建模的难度在于需考虑不同约束条件。

综上所述, 目前建模存在以下难点: ①执行器与反馈杆装配形成组件, 建模需考虑执行器-反馈杆之间的耦合作用; ②组件工作在油液环境下, 建模需考虑受液动力的影响; ③建模需考虑不同约束条件对静/动态输出特性的影响。

本文面向航空电液伺服阀应用, 针对力马达组件, 提出不同约束条件下的压电双晶片执行器-反馈杆组件数学建模方法, 采用分段建模思想与等效原理。在分析约束条件类型及其对组件动态特性影响规律基础上, 分别对执行器、连接件与反馈杆进行建模, 提出参数辨识方法, 针对变反馈杆质量、长度与夹持位置、油液环境的不同约束条件, 进行对比实验分析, 验证模型有效性与准确性。为电液伺服阀前置级精确数学建模提供一种新方法。

1 压电双晶片力马达组件约束分析

1.1 等效力马达组件样机设计

巴斯大学 Dhinesh 等人^[23]提出的压电型射流偏转板电液伺服阀的结构如图 1 所示, 可分为先

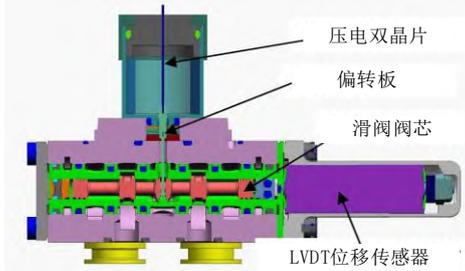


图 1 压电型射流偏转板电液伺服阀^[23]

Fig.1 Piezoelectric Jet Deflection Plate Electrohydraulic Servo Valve^[23]



图 2 压电型射流偏转板电液伺服阀力马达组件

Fig.2 Piezoelectric Jet Deflection Plate Electrohydraulic Servo Valve Force Motor Assembly

导级和功率级。其中作为先导级的力马达组件可分为压电双晶片和偏转板-反馈杆两个部件，如图 2 所示。偏转板和反馈杆采用一体化设计，整阀工作中，其末端小球卡在滑阀阀芯限位槽内，通过球面与槽内壁面接触传递反馈力。如图 3 所示为压电双晶片执行器的结构及其工作原理示意图。该压电双晶片执行器通过多层并联烧结工艺制备，以确保其多层结构能够协同工作。在图中，为了使结构和原理更容易理解，执行器的多层结构被简化为四层。每层压电陶瓷的极化方向与电场方向需要保持一致，为此，相邻的压电陶瓷层具有相反的极化排列方式，确保所有层在工作时能够产生统一的电场效应。该执行器设计有三个不同的驱动端口，分别对应两端固定的电压（-100 V 和 100 V）以及一个可在-100 V 至 100 V 之间变化的控制电压。具体而言，当控制电压在-100 V 至 0 V 范围内时，右侧压电陶瓷层的电场强度显著大于左侧压电层，导致右侧的伸长量大于左侧，使整个压电双晶片执行器向左弯曲，如图 3(a)所示。同理，当控制电压处于 0 V 至 100 V 范围时，左侧压电陶瓷层的电场强度超过右侧，左侧的伸长量因此大于右侧，从而使得压电双晶

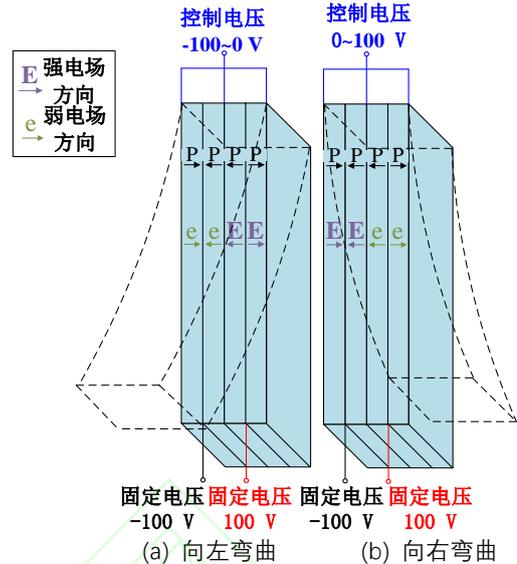


图 3 压电双晶片执行器结构与工作原理

Fig.3 Configuration and Operating Principle of Piezoelectric Bimorph Actuators

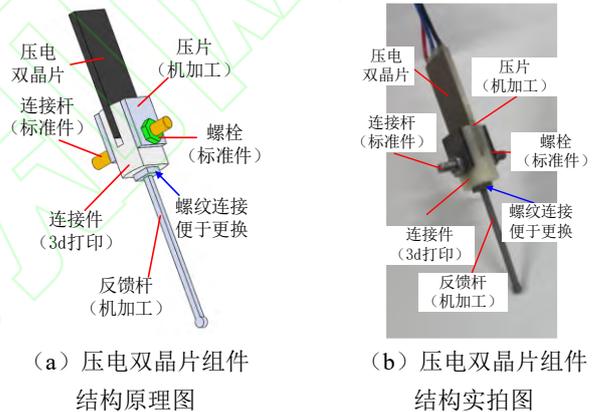


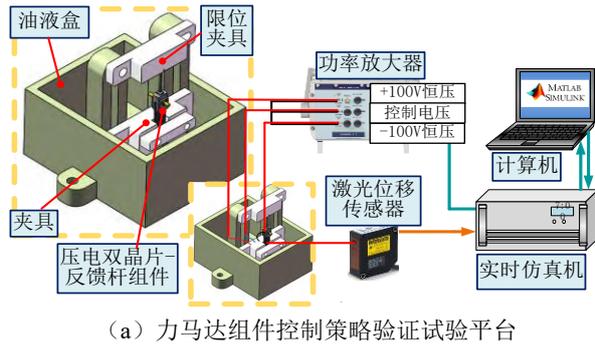
图 4 力马达组件构型

Fig.4 Piezoelectric Bimorph-Feedback Rod Assembly Configuration

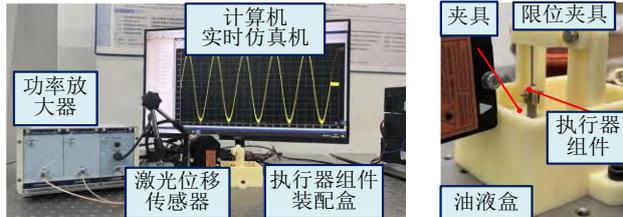
片执行器向右弯曲，如图 3(b)所示。驱动信号作用下压电双晶片带动偏转板-反馈杆偏转，使得进入射流盘左右接收腔的油液流量变化，因此滑阀阀芯左右端产生压力差。阀芯移动进一步带动反馈杆末端运动，产生一个使压电双晶片回到中位的反馈力。当压电双晶片产生的驱动力与偏转板-反馈杆所受液流力和反馈力平衡时，组件保持稳定，滑阀产生固定开口，整阀可稳定输出。

为便于研究不同约束条件下力马达组件的输出特性，设计了如图 4 所示的等效力马达组件样机。该组件由压电双晶片、压片、连接杆、连接件、螺栓和反馈杆七个关键部件组成，各部件经过优化设计以确保在工作环境中实现稳定的性能输出，并承受力学与电气应力。结合两级电液伺

伺服先导级执行器对输出力和位移的要求，选用



(a) 力马达组件控制策略验证试验平台



(b) 力马达组件控制策略验证试验平台实拍图

(c) 执行器组件装配盒实拍图

图 5 力马达组件控制策略验证试验平台

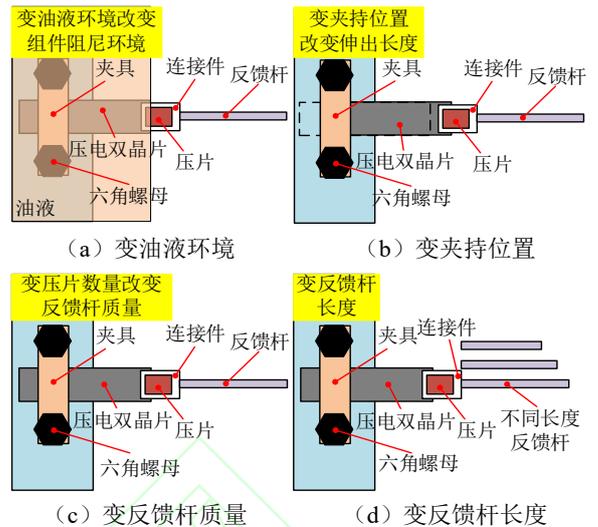
Fig.5 Experimental Platform for Validating the Control Strategy of Piezoelectric Bimorph-Feedback Rod Assembly

哈尔滨芯明天科技有限公司生产的NAC2222型号压电双晶片作为执行器元件。连接件通过夹持方式固定在压电双晶片上，以保持精确定位并高效传递驱动力。为减小连接位置应力集中导致的破坏，连接件采用树脂材料制成，缓解了接触应力，提高了安装和拆卸的便捷性。在连接部分，通过标准件螺栓与连接杆的螺纹连接确保了稳定性，避免高频工作时的松动或振动问题。通过增加压片进一步增强了夹持力，并可通过改变压片数量调节组件质量。

1.2 实验系统

电液伺服阀前置级用力马达组件输出特性测试平台如图5所示。平台由上位机、实时仿真机（灵思创奇Box-03）、功率放大器（芯明天E01.A3）、激光位移传感器（苏州创视TS-P30W）、压电双晶片（NAC2222）-反馈杆组件、油液盒、夹具等组成。油液盒内可填充油液，压电双晶片执行器的一端通过夹具固定在油液盒中，反馈杆的一端则通过限位夹具固定在油液盒内。该平台用于测试压电双晶片执行器在多工况下的输出特性，具体的试验信号流为：首先，上位机的控制算法利用SIMULINK进行编译，并通过实时仿真系统下载至仿真机，以实现实时运行和控制任务

的执行。实时仿真机根据接收到的信号生成电压



(a) 变油液环境

(b) 变夹持位置

(c) 变反馈杆质量

(d) 变反馈杆长度

图 6 不同约束条件示意图

Fig.6 Schematic Diagram of Different Boundary Conditions 驱动信号，并传输至功率放大器。功率放大器将输出的电压信号与恒压电源提供的两个稳压电压同时驱动压电双晶片执行器，产生相应的弯曲变形。激光位移传感器则将激光束照射到反馈杆的测点，测量其位移，并将相应的模拟电压信号输出至实时仿真机。实时仿真机接收该位移信号后，将其传输至计算机进行显示与记录，完成力马达组件输出特性测试。

1.3 不同约束条件下实验结果

组件在实际工作中会受到不同约束条件的影响，从而改变其输出特性。主要设计4种不同的约束条件，分别是变油液环境、变夹持位置、变反馈杆质量、变反馈杆长度。工作状态示意图如图6所示。不同约束条件下测试结果如表1所示。

静态输出特性方面：阻尼环境、反馈杆数量以及反馈杆长度对组件的静态输出位移没有显著影响。从理论上讲，反馈杆的长度会改变组件刚度，从而影响静态输出位移。然而，由于反馈杆刚度仅为压电双晶片刚度的四分之一，因此可忽略反馈杆长度变化对静态输出特性的影响。另一方面，伸出长度对组件的静态输出位移有显著影响，因为伸出长度会改变压电双晶片的刚度。随着伸出长度从 18 mm 减少到 14 mm，静态输出位移从 81.4 mm 减小至 53.7 mm，减小了 34%。动态输出特性方面：阻尼环境的影响主要体现在油液的密度和油液的粘度。油液密度和粘度的增加会导致组件的质量和阻尼增加，使组件的谐振

表1 不同约束条件下力马达组件输出特性实验结果

Table 1 Test Results of the Output Characteristics of the Force Motor Assembly Under Different Constraint Conditions

阻尼环境	伸出长度/mm	压片数量/个	反馈杆长度/mm	位移幅值/ μm	谐振幅值/dB	谐振频率/Hz
非浸油				81.4	15.1	685
液压油	18	2	24	81.7	14.1	647
硅酮油				81.5	13.4	641
	18			81.4	15.1	685
非浸油	16	2	24	72.8	14.3	717
	14			53.7	13.2	794
		2		81.4	15.1	685
非浸油	18	4	24	81.4	15.8	674
		6		81.9	16.4	662
			20	81.3	15.4	687
非浸油	18	2	24	81.4	15.1	685
			26	81.7	15.1	684

幅值减小和谐振频率增加。这一结论与的液动力模型相互验证。当阻尼环境从非浸油变化至液压油时，组件的谐振幅值从 15.1 dB 减小至 14.1 dB，下降了 1 dB，谐振频率从 685 Hz 减小至 647 Hz，减小了 5.5%；阻尼环境从非浸油变化至硅酮油时，组件的谐振幅值从 14.1 dB 减小至 13.4 dB，下降了 0.7 dB，谐振频率从 647 Hz 减小至 641 Hz，减小了 0.9%。伸出长度的减小会导致压电双晶片的质量减小、刚度增加，从而使得组件的谐振幅值减小，而谐振频率增大。伸出长度从 18 mm 减少至 14 mm 时，谐振幅值从 15.1 dB 降低至 13.2 dB，下降了 1.9 dB；谐振频率从 685 Hz 增加至 794 Hz，增加了 15.9%。增加压片数量会导致组件质量的增加，使谐振幅值增大、谐振频率减小。压电片数量从 2 片增加至 4 片时，谐振幅值从 15.1 dB 增大至 16.4 dB，增加了 1.3 dB；而谐振频率从 685 Hz 减小至 662 Hz，下降了 3.4%。反馈杆长度增加会使组件质量增加和刚度减小。但由于反馈杆的刚度和质量变化相对于组件整体较小，因此试验中未见谐振幅值或谐振频率变化。

2 力马达组件数学建模

2.1 建模思路与整体框架

如图 7 所示，组件的建模整体框架可分为三个主要部分：迟滞模型、等效线性动力学模型和液动力模型，旨在描述输入电压与反馈杆测点位

移之间的数学关系。首先，压电双晶片本身的迟滞非线性采用唯物模型中的 J-A 迟滞模型描述。其次，等效线性动力学模型用于描述压电双晶片、连接件及反馈杆三个部件之间的耦合线性动力学特性。由于各部件同时受到力与力矩的作用，每个部件的运动行为被分解为平动和转动两个独立的线性动力学方程。部件之间的相互耦合通过力和力矩的相互作用进行建模。进一步地，考虑到悬臂梁在受到力与力矩作用时，其振型将发生变化，导致基于振型函数的平方加权积分所得到的等效质量随工况变化而发生变化。因此，需要基于等效质量求解函数实时更新压电双晶片与反馈杆之间的等效质量。最后，液动力模型描述了组件在油液环境下运动时所受的液动力，其函数被简化为多项式形式。

2.2 迟滞模型

J-A 模型最初用于描述磁性材料的磁滞效应，但也适用于压电材料筹壁现象造成的迟滞效应^[18]。压电材料在施加电场时表现出电致应变效应，其输入电场与输出应变之间的非线性和迟滞关系可以通过 J-A 模型的物理机制进行描述和分析。基于钉扎效应引起的能量变化建立的 J-A 迟滞模型将总极化强度 P 分为可逆极化 P_{rev} 和不可逆极化 P_{irr} 两个部分^[18]：

$$P = P_{\text{rev}} + P_{\text{irr}} \quad (1)$$

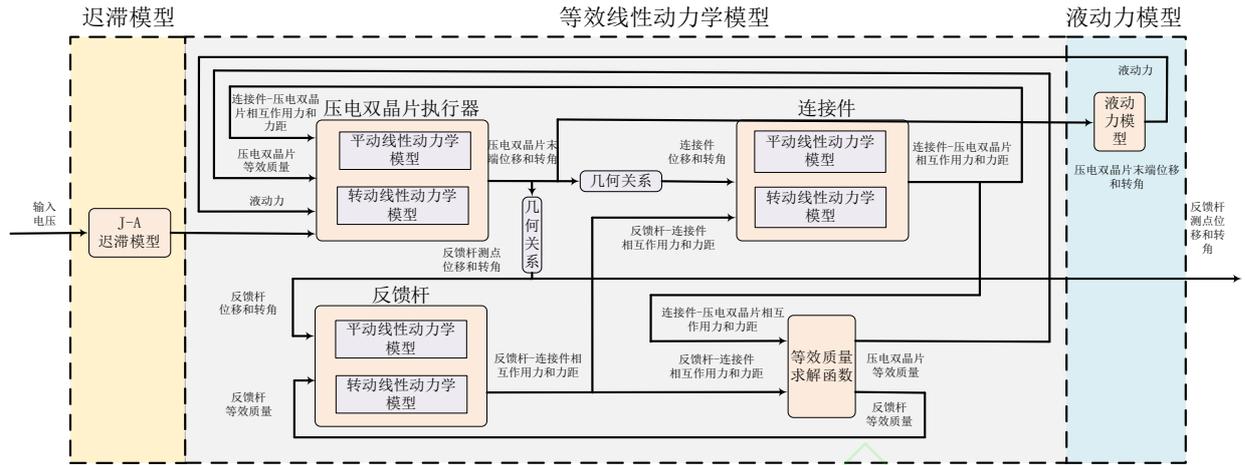


图 7 建模整体框架图

Fig.7 The overall framework diagram of the model

式中, P_{rev} 为可逆磁化分量, 由弹性方式的畴壁引起; P_{irr} 为不可逆磁化分量, 由结构的不连续性而形成的畴壁引起。

为计算压电材料理想极化过程中的极化强度和外部电场强度的关系, 引入无迟滞极化强度 P_{an} 。在计算畴壁形变产生的能量损耗时, 通常忽略 $(P_{an} - P)$ 高阶项, P_{rev} 、 P_{irr} 、 P_{an} 可表示为^[18]:

$$P_{rev} = c(P_{an} - P_{irr}) \quad (2)$$

式中, $c \in [0,1]$, 是可逆极化率, 描述可逆极化率在总极化的占比比例。

采用玻尔兹曼统计来指定偶极子占据某些能态的概率。假设材料是各向同性的, 那么热能量和静电能量的平衡就产生了 Langevin 方程来描述无迟滞的极化强度:

$$P_{an} = P_s \left[\coth \left(\frac{E_e}{a} - \frac{a}{E_e} \right) \right] \quad (3)$$

式中, E_e 是作用于压电材料的有效电场, a 是畴壁密度, P_s 是饱和极化强度。

压电从初始无极化状态被极化为饱和状态, 根本原因在内部的电偶极子有转动到相互平行的趋势, 这种内部的电场被称为内部电场 E_m 。在内部电场与外部电场的共同作用下, 压电材料逐步发生极化, 假设外电场 E 的方向与极化强度 P 一致, 压电材料发生极化的有效电场强度 E_e 为^[18]:

$$E_e = E + E_m = E + \alpha P_{an} \quad (4)$$

式中, α 是畴间耦合参数, E_m 是内部电场强度, E 是外部电场强度。

J-A 模型将极化强度描述为可逆分量 P_{rev} 与不

可逆分量 P_{irr} , 由两个微分方程构成:

$$\begin{cases} \frac{dP_{irr}}{dE} = \frac{P_{an} - P_{irr}}{k\delta - \alpha(P_{an} - P_{irr})} \\ \frac{dP_{rev}}{dE} = c \left(\frac{P_{an}}{dE} - \frac{P_{irr}}{dE} \right) \\ \delta = \begin{cases} 1, (dE > 0 \text{ 且 } P < P_{an}) \text{ 或 } (dE < 0 \text{ 且 } P > P_{an}) \\ -1, \text{其他} \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

式中, k 是钉扎损耗参数, δ 是符号函数, 当外磁场 E 增大时, $\delta = 1$, 当外磁 E 减小时, $\delta = -1$ 。该模型共存在五个待定的参数: c , a , α , k 和 P_s 。确定这五个参数, 并求解上述的微分方程即可获得压电材料的迟滞曲线。

2.3 线性动力学模型

力马达组件动力学方程如下, 同时考虑了力和弯矩的作用:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & j_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & I_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_s VP - \Gamma + F_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{21} & 0 \\ 0 & j_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{21} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{21} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ \theta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{12} + F_{32} \\ F_{32} d_{32} + M_{12} + M_{32} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{31} & 0 \\ 0 & j_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{31} & 0 \\ 0 & c_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{31} & 0 \\ 0 & I_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ \theta_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{23} \\ M_{23} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6)$$

式中, m_{11} 是压电双晶片等效质量, j_{12} 是压电双晶片等效转动惯量, m_{21} 是连接件等效质量, j_{22} 是连接件等效转动惯量, m_{31} 是反馈杆等效质量, j_{32} 是反馈杆等效转动惯量, c_{11} 是压电双晶片平动阻尼系数, c_{12} 是压电双晶片转动阻尼系数, c_{21} 是连接件平动阻尼系数, c_{22} 是连接件转动阻尼系数, c_{31} 是反馈杆平动阻尼系数, c_{32} 是反馈杆转动阻尼系数, k_{11} 是压电双晶片等效刚度, k_{21} 是连接件等效刚度, k_{31} 是连接件等效刚度,

I_{12} 是压电双晶片转动刚度, I_{22} 是连接件转动刚度, I_{32} 是反馈杆转动刚度, x_{11} 是压电双晶片末端位移, θ_{12} 是压电双晶片末端转角, x_{21} 是连接件重心位移, θ_{22} 是连接件转角, x_{31} 是反馈杆末端位移, θ_{32} 是反馈杆末端转角, Γ 是液动力, F_{21} 是连接件对压电双晶片的相互作用力, F_{12} 是压电双晶片对连接件的相互作用力, 以此类推, M_{21} 是连接件对压电双晶片相互作用弯矩, M_{12} 是压电双晶片对连接件的相互作用弯矩, 以此类推。

2.4 液动力模型

液体作用在梁上的力可以视为一种施加在刚体上的液动力载荷, 这种载荷由两部分组成: 附加质量和附加阻尼。附加质量与梁的振动加速度成正比, 而附加阻尼则与梁的振动速度相关。具体来说, 附加质量反映了液体对梁的惯性作用, 影响梁在振动时的加速度响应; 而附加阻尼则表示液体与梁之间的能量耗散, 主要与梁的振动速度密切相关, 对梁的阻尼特性起着重要作用。这两部分的共同作用决定了液体对梁振动的综合影响。这些关系直接遵循波动理论, 并已被加州大学伯克利分校流体力学实验室的测量结果所证实。根据 Morison^[25]的研究, 液动力荷载可以写为:

$$\Gamma(x,t) = \frac{\pi}{4} c_m \rho W_b^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{2} c_d \rho W_b \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \left| \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right| \quad (7)$$

式中, ρ 为油液的密度, w 为梁的横向位移, W_b 是梁浸没部分与液体流动速度法向平面的面积, c_d 和 c_m 分别为惯性系数和阻尼系数。可以通过特征振动频率来求解这两个系数。特征振动频率的表达式为:

$$\beta(x,\omega) = \frac{\rho W_b^2}{2\pi\mu} \omega = \Omega\omega \quad (8)$$

式中, μ 是液体的动力粘度。为了推导 c_d 和 c_m 的表达式, 首先需要对液动力荷载进行傅里叶变换。

$$\hat{\Gamma}(x,\omega) = \frac{\pi}{4} \rho W_b^2 \omega^2 \Theta(\beta(x,\omega)) \hat{w}(x,\omega) \quad (9)$$

式中, 三角上标表示经过傅里叶变换后的频域变量。 $\Theta(\beta(x,\omega))$ 表示正交化的液动力荷载, 是特征振动频率的无量纲化函数。根据 Morison^[25]的研究对于本文中具有矩形截面的刚性薄梁, 精确

表达式可以写为:

$$\Theta(\beta(x,\omega)) \approx 1.02 + 2.45\beta^{-1/2} - 12.49\beta^{-1/2} \quad (10)$$

在一个流动周期中非线性阻尼项可以根据以下条件化简:

$$|\cos(\omega t)| \cos(\omega t) \approx \frac{8}{3\pi} \cos(\omega t) \quad (11)$$

因此惯性系数和阻力系数近似表达为:

$$c_m \approx 1.02 + \frac{2.45}{\sqrt{\Omega}} \quad (12)$$

$$c_d \approx -\frac{-4.61}{\sqrt{\Omega}}$$

由上式可知, 液动力载荷可以是一个与液体密度, 液体动力粘度, 液体速度, 液体加速度相关的项。这里将液动力函数简化为下式:

$$\Gamma_{(\rho,\mu,\omega)} = \kappa_1 \rho^{1/2} + (\kappa_2 \mu^{1/2} + \kappa_3 \rho^{1/2} + \kappa_4) A^2 \omega + (\kappa_5 \mu^{1/2} + \kappa_6)(\kappa_7 \rho^{1/2} + \kappa_8) A \omega \quad (13)$$

将其余参数通过关于密度与粘度的多项式拟合, 再乘以加速度和速度的平方得到液动力载荷的函数表达式。式中, A 是压电双晶片浸入油液部分的面积, κ 是辨识的液动力相关参数。

3 参数辨识方法

3.1 等效动力学模型参数辨识

等效动力学模型中, 质量和刚度参数通过解析计算得到, 阻尼参数通过最小二乘法辨识得到。

假设: ①梁的横截面在弯曲过程中保持平面且垂直于梁的中性轴; ②梁的材料是均匀且各向同性的; ③变形较小, 故可以使用线性弹性理论; ④梁的轴向变形可以忽略。在弹性梁理论中, 悬臂梁的挠度 $w(x,t)$ 与施加在梁上的外力有关。悬臂梁动力学控制方程为:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

梁的主振动可以假设为 $w(x,t) = \varphi_n(x)q(t)$, 式中, $\varphi_n(x)$ 是悬臂梁的第 n 阶振型, $q(t) = a \sin(\omega t + \theta)$ 是悬臂梁广义坐标的振动。采用分离变量法带入空间控制方程可得振型的通解:

$$\varphi_n(x) = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x + c_3 \cosh \beta x + c_4 \sinh \beta x \quad (15)$$

此时代入边界条件即可求出压电双晶片的振

型方程。但是由于悬臂梁收到的边界载荷条件会随时间发生变化。这里以悬臂梁不受外部载荷为例，求解其自由振动时的振型。考虑悬臂梁的边界条件：固定端：挠度和截面转角为 0： $\varphi_n(0) = 0, \varphi_n'(x) = 0$ ；自由端：弯矩和剪力为 0： $\varphi_n''(l_1) = 0, \varphi_n'''(l_1) = 0$ 。得： $c_1 = -c_3, c_2 = -c_4$ 。由此可得前三阶模态函数：

$$\varphi_n(x) = \cos \beta_i x - \cosh \beta_i x + \xi_i (\sin \beta_i x - \sinh \beta_i x) \quad (16)$$

式中， $\xi_i = \frac{-\cos \beta_i l_1 + \cosh \beta_i l_1}{\sin \beta_i l_1 + \sinh \beta_i l_1}$ ， $(\beta_1 l_1 = 1.875, \beta_2 l_1 = 4.694, \beta_3 l_1 = 7.855)$ 。

由于悬臂梁收到的边界载荷条件会随时间发生变化，因此在仿真时需要通过 Matlab fsolve 函数，实时求解其振型函数的解析解。相关代码已在附录中给出。为了验证代码的正确性，振型求解函数中的边界条件设置为自由振动，将其与解析解对比，结果如图 8 所示。有计算结果可知，解析结果与有限元结果误差为 0.027%，说明数值解正确有效。等效质量 m_e 的计算是基于振型函数的平方加权积分来获得的，其公式为：

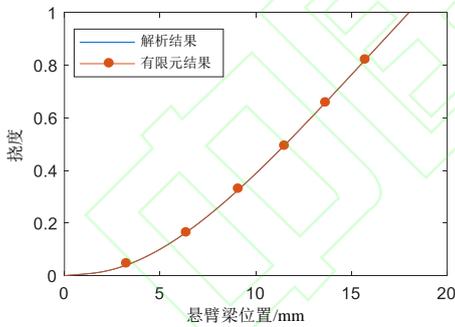


图 8 振型函数求解结果

Fig.8 Mode shape function solution results

$$m_e = \frac{\int_0^L \rho S \varphi(x)^2 dx}{\varphi(x_{\max})^2} \quad (17)$$

式中， ρ 是材料密度， S 是悬臂梁横截面积， L 是悬臂梁长度。根据胡克悬臂梁挠曲方程可计算等效刚度 k_e ：

$$k_e = \frac{3EI}{L^3} \quad (18)$$

式中， E 是材料杨氏模量， I 是悬臂梁截面惯性矩。动力学参数如表 2 所示。其中等效质量 m_{11} 和 m_{31} 在仿真时通过等效质量求解函数实时计算，表中

给出的是初始值，即悬臂梁不受力和力矩时的等效质量。模型准确性的验证在 3.3 节开展。

表2 等效动力学参数

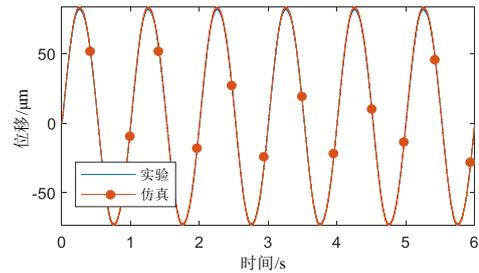
Table 2 Equivalent Dynamic Parameters

参数	值	辨识方法
m_{11}/kg	3.42×10^{-4}	等效质量求解函数
$j_{12}/\text{kg} \cdot \text{m}^3$	1.4×10^{-8}	解析建模计算
c_{11}	0.178	最小二乘法辨识
c_{12}	0.244	最小二乘法辨识
$k_{11}/\text{N/m}$	4.41×10^4	解析建模计算
$I_{12}/\text{Nm/rad}$	2.91×10^3	解析建模计算
m_{21}/kg	1.7×10^{-3}	解析建模计算
$j_{22}/\text{kg} \cdot \text{m}^3$	8.3×10^{-8}	解析建模计算
c_{21}	0.173	最小二乘法辨识
c_{22}	0.122	最小二乘法辨识
m_{31}/kg	4.71×10^{-5}	等效质量求解函数
$j_{32}/\text{kg} \cdot \text{m}^3$	4.97×10^{-9}	解析建模计算
c_{31}	0.166	最小二乘法辨识
c_{32}	0.143	最小二乘法辨识
$k_{31}/\text{N/m}$	3.62×10^3	解析建模计算
$I_{32}/\text{kg} \cdot \text{m}^3$	5.7×10^{-9}	解析建模计算
d_e	0.0162	最小二乘法辨识

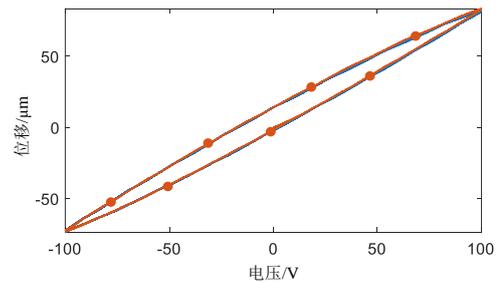
3.2 液动力模型参数辨识

基于数学模型在 MATLAB/Simulink 中搭建仿真模型，并采用最小二乘法辨识其五个参数，辨识参数的结果如表 2 所示。

3.3 迟滞模型参数辨识



(a) Jiles-Atherton 模型辨识结果



(b) Jiles-Atherton 模型滞环辨识结果

图 9 迟滞模型辨识结果

Fig.9 Hysteresis model identification results

J-A 迟滞非线性模型的参数通过与 1 Hz、100 V 谐波实验结果对比确定。基于 J-A 模型微分方程，在 MATLAB/Simulink 中搭建了仿真模型，并采用最小二乘法辨识其五个参数。实验结果与仿真结果的对比如图 9 所示，辨识参数的结果如表 3 所示。实验结果的迟滞为 11.2%，仿真结果的迟滞为 11.6%。仿真辨识结果与实验结果的方均根误差为 2.5 μm ，表明所构建的迟滞模型能够准确描述系统的非线性迟滞特性。

表3 液动力模型和迟滞模型参数

Table 3 Hydrodynamic Model Parameters and Hysteresis Model Parameters

参数	值	参数	值
κ_1	0.0238	κ_2	0.0630
κ_3	0.0014	κ_4	0.0019
κ_5	0.1493	κ_6	0.0748
κ_7	0.0108	κ_8	0.0092
$\alpha/m/F$	$7.364e9$	$a/V/m$	6.13×10^7
c	0.839	$k/V/m$	6.48×10^7
$P_s/C/m^2$	0.0192		

4 实验验证

4.1 变反馈杆质量

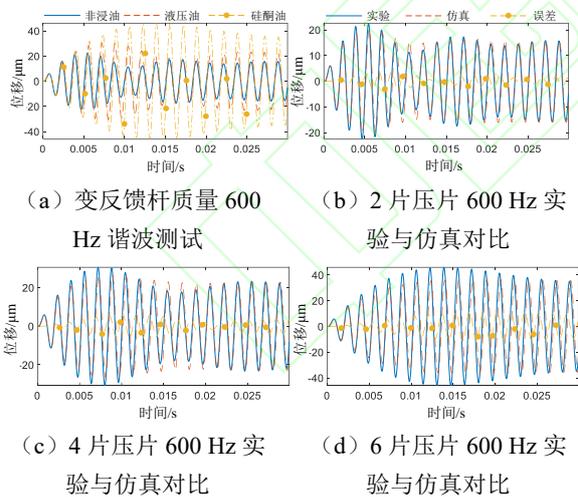


图 10 变反馈杆质量仿真与实验对比结果

Fig.10 Simulation and Experimental Comparison Results under Variable Feedback Rod Mass

变反馈杆质量组件输出测试结果如图 10 (a) 所示，输出幅值最大相差 18 μm ，相位最大相差 34°，说明反馈杆质量对输出特性的影响。变反馈杆质量实验与仿真对比结果如图 10 (b) - (d) 所示。压片数量为 2 时，仿真与实验的方均根误差为 2.4 μm ；压片数量为 4 时，仿真与实验的方

均根误差为 3.2 μm ；压片数量为 6 时，仿真与实验的方均根误差为 5.7 μm 。

4.2 变反馈杆长度

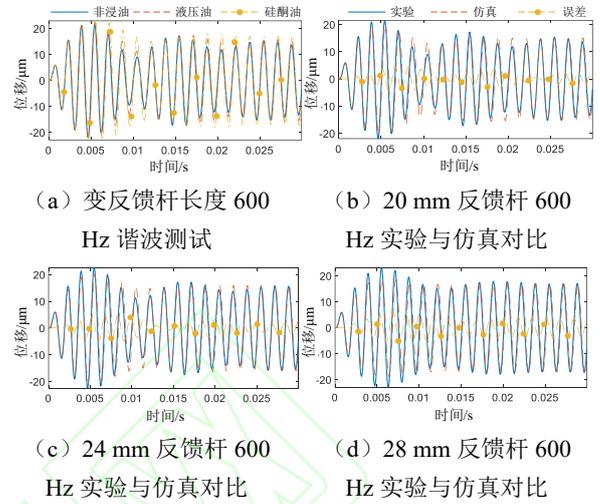


图 11 变反馈杆长度仿真与实验对比结果

Fig.11 Simulation and Experimental Comparison Results under Variable Feedback Rod Length

变反馈杆长度组件输出测试结果如图 11 (a) 所示，输出幅值最大相差 3.4 μm ，相位最大相差 10°。由于改变反馈杆长度导致的刚度和质量变化相对组件整体小，因此输出特性变化小。变反馈杆质量实验与仿真对比结果如图 11 (b) - (d) 所示。反馈杆长度为 20 mm 时，仿真与实验的方均根误差为 2.1 μm ；反馈杆长度为 24 mm 时，仿真与实验的方均根误差为 2.4 μm ；反馈杆长度为 28 mm 时，仿真与实验的方均根误差为 2.5 μm 。

4.3 变夹持位置

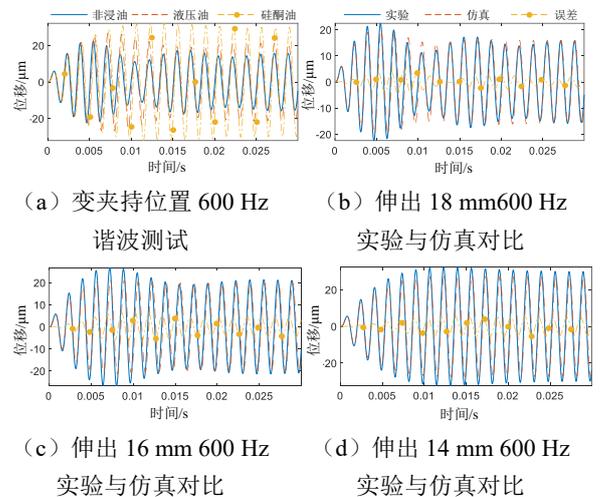


图 12 变夹持位置仿真与实验对比结果

Fig.12 Simulation and Experimental Comparison Results under Variable Clamping Positions

变夹持位置输出测试结果如图 12 (a) 所示，

输出幅值最大相差 $20\ \mu\text{m}$ ，相位最大相差 26° ，说明夹持位置对输出特性的影响。变夹持位置实验与仿真对比结果如图 12 (b) - (d) 所示。伸出长度为 $18\ \text{mm}$ 时，仿真与实验的方均根误差为 $2.4\ \mu\text{m}$ ；伸出长度为 $16\ \text{mm}$ 时，仿真与实验的方均根误差为 $1.7\ \mu\text{m}$ ；伸出长度为 $14\ \text{mm}$ 时，仿真与实验的方均根误差为 $0.6\ \mu\text{m}$ 。

4.4 变油液环境

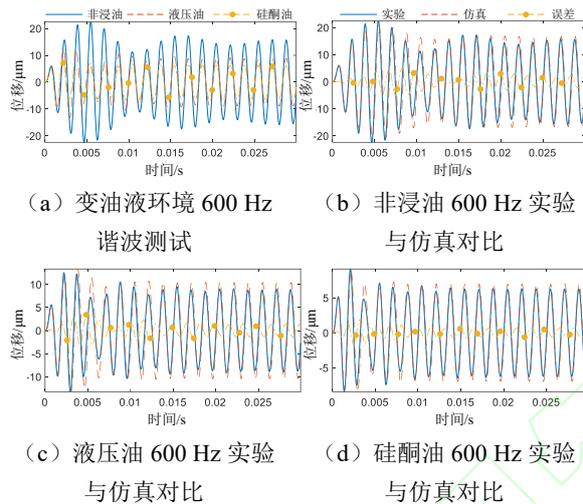


图 13 变油液环境仿真与实验对比结果

Fig.13 Simulation and Experimental Comparison Results under Variable Oil Environments

变油液环境输出测试结果如图 13 (a) 所示，输出幅值最大相差 $19\ \mu\text{m}$ ，相位最大相差 23° ，说明油液环境对输出特性的影响。变反馈杆质量实验与仿真对比结果如图 13 (b) - (d) 所示。在非浸油环境下，仿真与实验的方均根误差为 $2.4\ \mu\text{m}$ ；在液压油环境下，仿真与实验的方均根误差为 $5.3\ \mu\text{m}$ ；在硅酮油环境下，仿真与实验的方均根误差为 $3.9\ \mu\text{m}$ 。

5 结论

针对压电型射流偏转板电液伺服阀先导级设计了等效力马达组件，开展了输出特性测试实验，建立了数学模型，主要结论如下：

1) 对组件进行了不同约束条件下输出特性研究。实验结果显示，当伸出长度减小 $4\ \text{mm}$ 时静态输出方面，位移最大减小 $27.7\ \text{mm}$ ；动态输出方面，谐振幅值最大减小 $1.9\ \text{dB}$ ，谐振频率最大增大 15.9% ，测试结果于数学模型结论一致。

2) 针对不同约束条件下的力马达组件，建

立了包含迟滞非线性、等效线性动力学及液动力三部分的数学模型。

3) 对数学模型进行了静动态特性仿真与实验对比研究。静态输出特性方面，仿真迟滞为 11.6% ，实验迟滞为 11.2% ，仿真与实验的方均根误差为 $2.5\ \mu\text{m}$ ；动态输出特性方面，当驱动频率为 $600\ \text{Hz}$ 时，不同约束条件下，仿真与实验的最大方均根误差为 $5.7\ \mu\text{m}$ ，验证了数学模型准确性。

参考文献：

- [1] 葛声宏,程文豪,谢张辰,等.偏转板射流伺服阀前置级液流数学建模与实验研究[J].航空动力学报
GE S H, CHENG W H, XIE Z C, et al. Mathematical modeling and experimental study on hydraulic force of deflector jet servo valve's first-stage [J]. Journal of Aerospace Power, 2025, 40(01): 398-409. (in Chinese).
- [2] 赵春华,宁春玉.基于单片机的电液伺服控制系统的研究[J].液压与气动,2014,(12):48-50.
ZHAO C H, NING C Y. Research on electrohydraulic servo control system based on microcontroller [J]. Hydraulics and Pneumatics, 2014, (12): 48-50. (in Chinese).
- [3] 阎耀保,郭文康,胡云堂,等.考虑电涡流效应的射流管伺服阀建模及频率特性[J].航空动力学报,2020,35(08):1777-1785.
YIN Yaobao, GUO Wenkang, HU Yuntang, et al. Modeling and frequency characteristics of jet pipe servo valves considering eddy current effects[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(08): 1777-1785. (in Chinese)
- [4] 朱玉川,李跃松.射流伺服阀用放大超磁致伸缩执行器建模及分析[J].航空学报,2014,35(11):3156-3165.
ZHU Y C, LI Y S. Modeling and analysis of amplified giant magnetostrictive actuators for jet servo valves [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2014, 35(11): 3156-3165 (in Chinese).
- [5] 阎耀保,王玉.射流管伺服阀前置级压力特性[J].航空动力学报,2015,30(12):3058-3064.
YIN Y B, WANG Y. Pressure characteristics of the first stage of jet pipe servo valve [J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(12): 3058-3064. (in Chinese).
- [6] 王彬,任鹏达,张伟,等.航空双系统直驱伺服阀阀芯振荡机理及抑制方法[J].航空学报,2023,44(05):284-296.
WANG B, REN P D, ZHANG W, et al. Oscillation mechanism and suppression method of spool in aerospace dual-system direct-drive servo valve [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(05): 284-296 (in Chinese).

- [7] 李跃松,朱玉川,吴洪涛,等.超磁致伸缩执行器驱动的射流伺服阀参数优化[J].航空学报,2011,32(07):1336-1344.
LI Y S, ZHU Y C, WU H T, et al. Parameter optimization of jet servo valves driven by giant magnetostrictive actuators [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32(07): 1336-1344 (in Chinese).
- [8] 宋磊,黄煥贞,汪伟,等.多压电膜包覆式合成射流激励器的结构设计与性能分析[J/OL].航空动力学报,1-17[2025-05-20].
<https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20240713>.
SONG L, HUANG H Z, WANG W, et al. Structural design and performance analysis of multi-piezoelectric-film-covered synthetic jet actuator [J/OL]. *Journal of Aerospace Power*, 1-17 [2025-05-20]. <https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20240713> (in Chinese).
- [9] Ling J, Chen L, Zhang M, et al. Development of a dual-mode electro-hydrostatic actuator with serial-parallel hybrid configured piezoelectric pumps[J]. *Smart Materials and Structures*, 2023, 32(2): 025011.
- [10] 王玉文,朱玉川,凌杰,等.滑阀式压电高速开关阀特性研究[J].航空动力学报,2024,39(11):501-509.
WANG Y W, ZHU Y C, LING J, et al. Study on characteristics of spool-type piezoelectric high-speed switching valve [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2024, 39(11): 501-509. (in Chinese).
- [11] 华顺明,张宇,彭宇,等.压电执行器及其在液压阀中的应用[J].压电与声光,2020,42(05):697-703.
HUA S M, ZHANG Y, PENG Y, et al. Piezoelectric actuators and their applications in hydraulic valves [J]. *Piezoelectrics & Acousto-optics*, 2020, 42(05): 697-703 (in Chinese).
- [12] 周淼磊,杨志刚,高巍,等.高速精密压电型电液伺服阀及其控制方法[J].哈尔滨工业大学学报,2009,41(09):160-163.
ZHOU M L, YANG Z G, GAO W, et al. High-speed precision piezoelectric electrohydraulic servo valve and its control method [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2009, 41(09): 160-163 (in Chinese).
- [13] 俞军涛,焦宗夏,吴帅.基于液压微位移放大结构的新颖压电陶瓷直接驱动阀设计及仿真[J].机械工程学报,2013,49(02):151-158.
YU J T, JIAO Z X, WU S. Design and simulation of a novel piezoelectric ceramic direct-drive valve based on hydraulic micro-displacement amplification structure [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(02): 151-158 (in Chinese).
- [14] 沈显邦,易凯军,景旭贞,等.面向航空结构低频振动的力电耦合超材料板设计[J].航空学报,2023,44(05):187-199.
SHEN X B, YI K J, JING X Z, et al. Design of force-electric coupled metamaterial plates for low-frequency vibration of aerospace structures [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2023, 44(05): 187-199 (in Chinese).
- [15] Ling J, Feng Z, Zheng D, et al. Robust adaptive motion tracking of piezoelectric actuated stages using online neural-network-based sliding mode control[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 150: 107235.
- [16] 凌杰,张允执,陈龙,等.数字压电叠堆执行器:原理、建模与控制[J].中国机械工程,2025,36(2):228-237.
LING J, ZHANG Y Z, CHEN L, et al. Digital piezoelectric stack actuator: principles, modeling, and control [J]. *China Mechanical Engineering*, 2025, 36(2): 228-237. (in Chinese).
- [17] Lee S H, Ozer M B, Royston T J. Piezoceramic hysteresis in the adaptive structural vibration control problem[J]. *Journal of intelligent material systems and structures*, 2002, 13(2-3):117-124.
- [18] Smith R C, Ounaies Z. A domain wall model for hysteresis in piezoelectric materials[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2000, 11(1): 62-79.
- [19] Ni L, Chen J, Chen G, et al. An explainable neural network integrating Jiles-Atherton and nonlinear autoregressive exogenous models for modeling universal hysteresis[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2024, 136: 108904.
- [20] Stirbu R S, Mitoseriu L. Modeling of hysteretic response of porous piezo/ferroelectric ceramics[J]. *Computational Materials Science*, 2024, 232: 112633.
- [21] Rouzbehi M, Kazempour A, Piri S. Identifying the effect of the physical parameters of the Jiles-Atherton model on the hysteresis loop using the finite element method[J]. *Quarterly Journal of Optoelectronic*, 2023, 5(1): 119-125.
- [22] Khemani V, Azarian M H, Pecht M G. Efficient identification of Jiles-Atherton model parameters using space-filling designs and genetic algorithms[J]. *Eng*, 2022, 3(3): 364-372.
- [23] Sangiah D K. Fluid metering using active materials[D]. University of Bath, 2011.
- [24] Sangiah D K, Plummer A R, Bowen C R, et al. Modelling and experimental validation of a novel piezohydraulic servovalve[C]. *Proceedings of the ASME Dynamic Systems and Control Conference and Bath/ASME Symposium on Fluid Power and Motion Control*. Arlington: ASME, 2011: 343-350.
- [25] Morison J R, Johnson J W, Schaaf S A. The force exerted by surface waves on piles[J]. *Journal of Petroleum Technology*, 1950, 2(05): 149-154.