

# 基于 J-A 模型的压电双晶片执行器非线性建模及验证

彭洪涛,凌杰,李成刚,朱玉川

(南京航空航天大学 机电学院,江苏 南京 210016)

**摘要:**针对压电双晶片执行器的非线性建模问题,根据 Hammerstein 结构原理,将执行器系统线性动态模块与非线性静态模块串联,提出了基于 Jiles-Atherton 模型的压电双晶片建模及参数辨识方法,并结合有限元数值仿真和试验测试对比分析模型的准确性。静/动态对比结果显示,理论模型、有限元仿真及试验测试迟滞非线性分别为 18.1%,17.9%,19.3%,理论模型、有限元仿真与试验测试的阶跃响应相对误差平均值分别为 5.2% 和 4.1%,表明建模方法准确有效。

**关键词:**压电双晶片;迟滞非线性;Hammerstein 结构;物理模型;有限元分析

中图分类号:TN384 文献标识码:A

## Nonlinear Modeling and Verification of Piezoelectric Bimorph Actuator Based on Jiles-Atherton Model

PENG Hongtao, LING Jie, LI Chenggang, ZHU Yuchuan

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** To address the nonlinear modeling of piezoelectric bimorph actuators, a method is proposed based on the Hammerstein structure. This approach connects the linear dynamic and nonlinear static modules of the system in series, and a modeling and parameter identification method for piezoelectric bimorphs is introduced based on the Jiles-Atherton model. To verify the accuracy of the model, finite element simulations and experimental tests were conducted and compared. The static/dynamic comparison results indicated hysteresis nonlinearities of 18.1%, 17.9%, and 19.3% for the theoretical model, simulation, and experiments, respectively. Additionally, the average relative errors in the step response of simulations and experimental tests with respect to the theoretical model were 5.2% and 4.1%, highlighting the accuracy and effectiveness of the proposed modeling approach.

**Key words:** piezoelectric bimorph; hysteresis nonlinearity; Hammerstein structure; physical model; finite element simulation

## 0 引言

压电材料具有高分辨率、快速响应、抗电磁干扰等优点<sup>[1]</sup>,广泛应用于光学、机器人、微机电系统等精密工程领域<sup>[2]</sup>。常见的压电执行器有叠堆型、双晶片型、扫描管型、纤维棒型等结构形式,其中压电双晶片因其独特的双向弯曲和高位移能力优势而适用于微型泵、阀和光学调节器等仪器设备。

目前国内外学者对压电执行器的建模方法做

了大量的研究,主要分为基于几何形状拟合的唯象模型和基于物理解析分析的唯物模型两类<sup>[3]</sup>。其中,唯象模型是基于非线性几何形状近似拟合原理构建数学模型,其参数不具有实际物理意义<sup>[4]</sup>。唯象模型主要包括 Maxwell 模型、Bouc-Wen 模型(简称 BW 模型)、Preisach 模型(简称 P 模型)、Prandtl-Ishlinskii 模型(简称 PI 模型)等<sup>[5]</sup>。其主要优点是通过简化系统内在机理的复杂性和依赖经验数据,

收稿日期:2024-09-18

基金项目:航空科学基金资助项目(20220007052001)

作者简介:彭洪涛(1999-),男,浙江省嘉兴市人,硕士生。通信作者:凌杰(1990-),男,江苏省建湖市人,副教授,硕士生导师。

能够快速有效地预测和分析实际应用中的行为,但因其参数无实际物理意义,故难以用于指导执行器物理构型设计与参数优化。

唯物模型是基于迟滞等非线性的内在产生机理构建的物理解析模型,其参数具有实际物理含义,主要包括 Jiles-Atherton 模型(以下简称为 J-A 模型)。唯物模型提供了深入的物理机制解释,可用于指导物理构型设计与参数优化。针对压电材料非线性和输入、输出依赖记忆特性影响定位精度的问题,Ni 等<sup>[6]</sup>将 J-A 模型转化为神经网络结构,与非线性自回归外生输入神经网络相结合,首次提出了基于 J-A 模型的混合神经网络模型。针对压电材料非线性机电耦合问题,Stirbu 等<sup>[7]</sup>使用 J-A 模型进行切换,结合有限元分析模拟了压电材料极化场和应变场滞后响应的孔隙率,以确定局部机电响应系数以及有效介电和压电常数。针对不同 J-A 模型参数对磁滞曲线影响的问题,Rouzbeh<sup>[8]</sup>分析了磁性材料物理参数变化对磁滞曲线的影响。针对磁性材料物理参数变化对磁滞曲线影响的问题,基于磁滞回线和磁性材料的物理参数之间的联系,使用有限元法和 COMSOL 代码在软件中模拟磁滞回线、磁通密度和磁场分量,最终得到 J-A 模型参数与磁滞回线面积的变化、磁滞回线的特征值、磁通密度和磁场分量间的关系。针对 J-A 模型数值积分和常微分方程求解难的问题,Varun Khemani 等<sup>[9]</sup>采用随机优化技术探索 J-A 模型参数的设计空间,为优化算法提供了更窄的参数范围,从而减少了识别最佳 Jiles-Atherton 模型参数所需的时间。Scaliuk 等<sup>[10]</sup>基于 Jiles-Atherton 增量模型推导了控制关系,利用实验获得的滞后回线数据实现参数识别,并基于识别的参数开展有限元静态和模态分析,验证了模型的准确性。以上研究多集中于压电材料本身的唯物建模与辨识,未见对压电双晶片构型的相关研究。

为阐明压电双晶片的工作原理,准确描述双晶片执行器的输出性能指标与其设计参数之间的关系,开展了基于 J-A 模型的压电双晶片执行器非线性建模及验证研究。在构建执行器动态唯物模型的基础上,结合理论模型、有限元仿真及试验测试的对比分析,验证模型的正确性。

## 1 非线性建模

### 1.1 压电双晶片执行器结构与工作原理

图 1 为压电双晶片执行器的结构示意图及其工作原理。通过并联烧结工艺制备多层压电双晶片执行器,以确保该多层结构能够协同工作。图中,为使结构和原理更易被理解,执行器的多层结构被简化为 4 层。每层压电陶瓷的极化方向与电场方向需要保持一致,因此,相邻的压电陶瓷层具有相反的极化排列方式,以确保所有层在工作时能够产生统一的电场效应。该执行器设计有 3 个不同的驱动端口,分别对应两端固定的电压(-100 V 和 100 V)以及一个可在 -100~100 V 变化的控制电压。具体而言,当控制电压在 -100~0 V 时,右侧压电陶瓷层的电场强度明显大于左侧压电层,导致右侧的伸长量大于左侧,使整个压电双晶片执行器向左弯曲,如图 1(a)所示。同理,当控制电压处于 0~100 V 时,左侧压电陶瓷层的电场强度超过右侧,左侧的伸长量大于右侧,故而压电双晶片执行器向右弯曲,如图 1(b)所示。

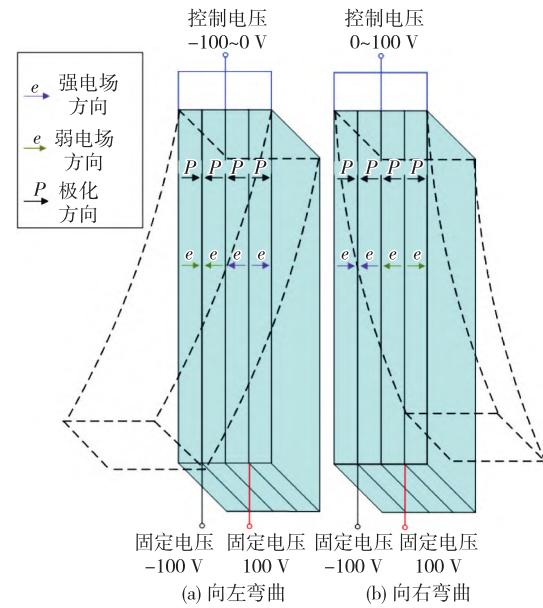


图 1 压电双晶片执行器结构与工作原理

图 2 为基于 Hammerstein 结构的压电双晶片执行器建模原理。图中,  $V$  为输入的控制电压,  $M$  为由静态非线性模块输出的总极化,而  $x$  为压电双晶片执行器的输出位移。为了描述执行器的系统动力学行为,采用将静态非线性模块与线性动态模块串联方式。具体而言,将压电双晶片执行器等效为一个悬臂梁结构,并据此构建其动力学模型,记

为 G。为了描述该系统的静态非线性特性,采用 J-A 模型。通过最小二乘法对系统的相关参数进行辨识,得到静态非线性迟滞模型,记为 H。

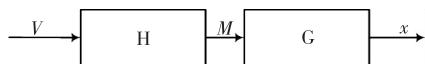


图 2 压电双晶片执行器 Hammerstein 结构框图

## 1.2 线性动力学建模

假设压电双晶片执行器各层陶瓷的物理性质一致,并忽略内部电极的厚度,则执行器可以简化为两个等厚度的陶瓷层。简化后执行器悬臂梁的自由端挠度如图 3 所示。

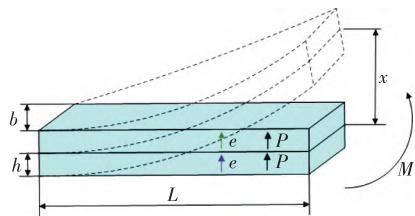


图 3 简化后压电双晶片执行器自由挠度

当施加恒定的控制电压时,执行器产生应力  $\sigma$ ,沿其长度  $L$  方向产生恒定弯矩  $M$ 。恒定弯矩  $M$  和顶层应力  $\sigma$  分别为

$$M = Fh = \sigma bh^2 \quad (1)$$

$$\sigma = d_{31}eE \quad (2)$$

式中: $F$  为压电双晶片逆压电效应产生的、作用于底层的拉阻力; $h$  为压电双晶片厚度; $b$  为压电双晶片宽度; $e$  为电场强度; $E$  为杨氏模量; $d_{31}$  为压电常数。电场强度  $e$  为

$$e = \frac{V}{h/n} \quad (3)$$

式中: $V$  为作用于压电双晶片执行器的控制电压; $n$  为压电双晶片内部的陶瓷层数。研究压电双晶片的末端位移,即挠度与电压间的关系,根据欧拉伯努利梁理论,压电双晶片执行器挠度为

$$x = \frac{ML^2}{2EI} \quad (4)$$

$$I = \frac{2bh^3}{3} \quad (5)$$

式中: $x$  为压电双晶片挠度(即执行器末端位移); $I$  为压电双晶片截面的惯性矩。联立式(1)-(5)可得挠度  $x$  与电压  $V$  之间的关系,以及压电双晶片执行器刚度  $k$  的表达式:

$$k_e = \frac{4Eb h^3}{3L^2} \quad (6)$$

$$x = \frac{3L^2 d_{31} n V}{4h^2} \quad (7)$$

因此,压电双晶片执行器线性动力学模型为

$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = k_e d_e V \quad (8)$$

式中: $m_e$  为压电双晶片执行器等效质量; $c_e$  为阻尼系数; $x$  为执行器末端位移; $\dot{x}$  为执行器末端速度; $\ddot{x}$  为执行器末端加速度。为便于理解,定义式中位移与电压之间的比值为

$$d_e = 3L^2 d_{31} n / (4h^2) \quad (9)$$

## 1.3 率相关迟滞非线性建模

采用 J-A 迟滞模型描述压电双晶片执行器的静态非线性特性。J-A 模型最初用于描述磁性材料的磁滞效应,同时也适用于类似的铁电材料和压电材料。具有铁电性或铁磁性的材料内部被划分为多个微小的区域,称为畴。每个畴内,电偶极子(或磁偶极子)的方向相同,但不同畴之间的偶极子方向可能并不一致。畴壁是分隔不同畴的界面,决定了各个畴的边界。当外加电场或磁场施加于材料时,畴壁移动,导致畴的大小和偶极子方向发生改变。畴壁的移动使压电材料产生极化或磁化效应,从而响应外加场。由于材料内部存在结构缺陷、杂质及晶格不均匀等因素,畴壁的移动受到限制和阻碍,此现象被称为钉扎效应。钉扎效应导致畴壁不能完全自由地在外场作用下移动,进而使得材料的极化或磁化响应滞后于外加电场或磁场的变化,形成一种迟滞效应。迟滞现象表现为当外加电场或磁场增强或减弱时,材料的极化或磁化强度不会立即跟随外场而变化,而是表现出明显的非线性和路径依赖的特性。迟滞效应的特征通常由磁滞回线进行描述,回线面积表示材料每次外场循环过程中所消耗的能量。这是因为畴壁在克服钉扎障碍过程中会发生能量损耗,导致外场循环后出现能量耗散。磁滞回线的面积越大,说明能量损失越多。因此,畴壁模型通过详细解释畴壁的运动、钉扎效应及其对外加场的响应机制,揭示了压电材料在外场作用下所表现出的非线性、滞后性及能量损耗的物理根源。基于该理论,J-A 模型的数学表达式能够

精确描述压电双晶片执行器的静态非线性迟滞行为。该模型的表达式为

$$M_{an} = M_s \left[ \coth \left( \frac{E_e}{a} - \frac{a}{E_e} \right) \right] \quad (10)$$

$$E_e = E + \alpha M_{an} \quad (11)$$

$$M_{an} = M_{an} - k \frac{dM_{irr}}{dE_e} \quad (12)$$

$$\frac{dM_{irr}}{dE_e} = \frac{M_{an} - M_{irr}}{k\delta - \alpha(M_{an} - M_{irr})} \quad (13)$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & (dE_e > 0 \text{ and } M_{an} < M_{irr}) \text{ or} \\ & (dE_e < 0 \text{ and } M_{an} > M_{irr}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

$$M_{rev} = c(M_{an} - M_{irr}) \quad (15)$$

$$M = M_{rev} + M_{irr} \quad (16)$$

式中: $E_e$ 为作用于压电材料的有效电场; $E$ 为作用于压电材料的总电场; $M$ 为总极化; $M_{irr}$ 为不可逆极化; $M_{rev}$ 为可逆极化; $M_s$ 为饱和极化; $M_{an}$ 为非滞后极化; $c$ 为极化可逆性; $k$ 为钉扎损耗; $a$ 为畴壁密度; $\alpha$ 为瞬间耦合。

基于J-A模型的压电双晶片执行器系统动力学模型为

$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = k_e(d_e V - M) \quad (17)$$

## 2 率相关参数辨识

### 2.1 线性动力学模型参数辨识

采用最小二乘法对压电双晶片执行器的线性动力学模型参数进行辨识。为了确保辨识过程中排除非线性静态模块对执行器输出的影响,使用幅值较小的10 V阶跃信号进行测试。小幅度阶跃信号能够避免非线性因素的干扰,确保测试结果主要反映执行器的线性动力学特性。根据阶跃响应测试结果,利用最小二乘法对执行器的主要动力学参数进行精确辨识,包括等效质量 $m_e$ 和阻尼系数 $c_e$ ,而系统刚度 $k_e$ 可通过理论解析模型计算得到。表1为最终所得各个参数的辨识和计算结果。

表1 压电双晶片执行器线性动力学模型参数辨识结果

参数	$m_e/\text{kg}$	$c_e/(\text{N} \cdot \text{s}^{-1})$	$k_e/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$d_e/(\text{m} \cdot \text{V}^{-1})$
参数值	0.19	0.26	1 667	$1.28 \times 10^{-6}$

### 2.2 J-A迟滞模型参数辨识

为了避免线性动态模块对执行器响应的干扰,

更准确地提取静态非线性模块参数,故在进行辨识时选用1 Hz、100 V低频率大幅值谐波信号。基于式(10)-(16),在Matlab/Simulink环境中构建仿真模型。根据谐波信号测试结果,采用最小二乘法对J-A模型参数进行辨识。最小二乘法能够最小化模型输出与实验数据间的误差,从而得到更精确的参数估计。J-A模型的参数辨识结果如表2所示。

表2 压电双晶片执行器J-A迟滞模型参数辨识结果

参数	$M_s/(C \cdot m^{-2})$	$k/(C \cdot m^{-2})$	$a/(V \cdot m^{-1})$	$\alpha/(V \cdot m \cdot C^{-1})$
参数值	0.72	0.52	$1.10 \times 10^7$	$5.33 \times 10^6$

## 3 压电双晶片输出特性仿真分析

图4为压电双晶片输出特性的有限元仿真结果与解析模型仿真结果对比。

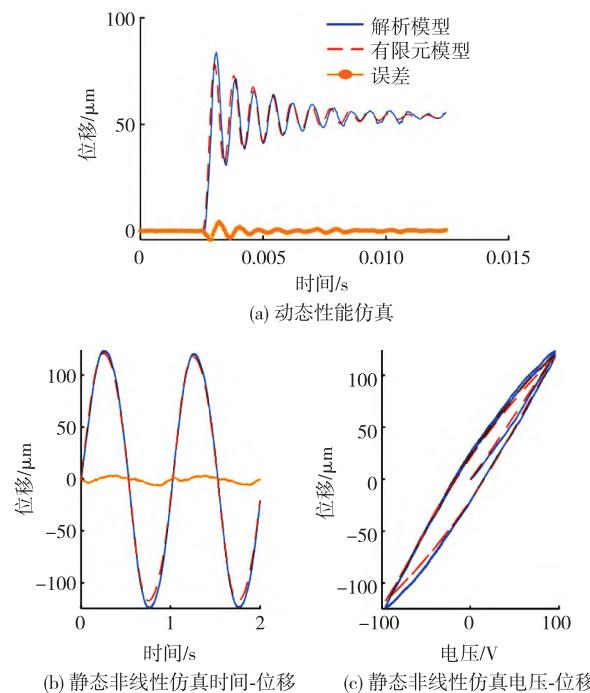
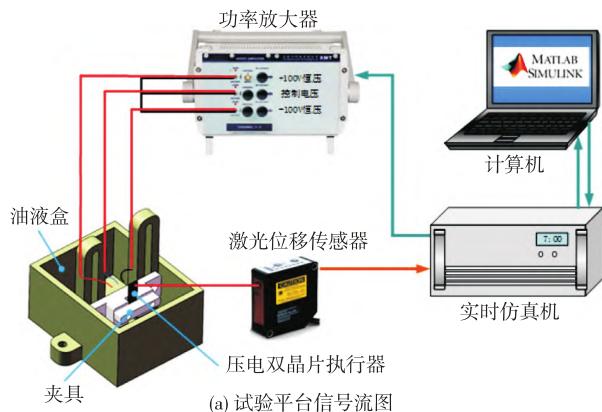


图4 有限元仿真结果与解析模型仿真结果对比

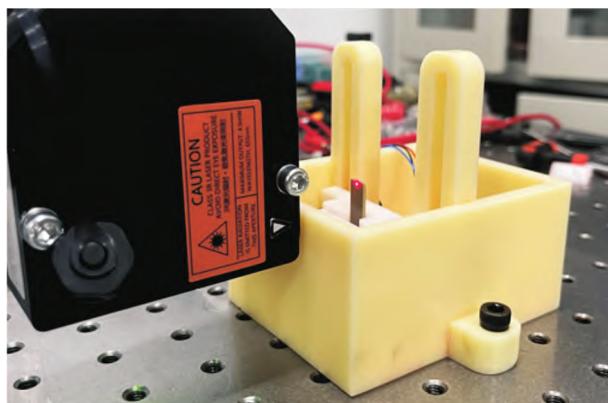
由图4可知,在动态性能方面,有限元仿真结果的上升时间为0.8 ms,调节时间为7.3 ms,解析模型仿真结果的上升时间为0.9 ms,调节时间为8.9 ms。在静态非线性方面,有限元模型仿真结果的迟滞为18.1%,解析模型仿真结果的迟滞为17.9%,解析模型与有限元模型仿真结果的相对误差平均值为4.4%。

#### 4 压电双晶片输出特性试验分析

为了验证所建模型的准确性,搭建了硬件试验平台(见图 5)以测量压电双晶片执行器的输出特性。



(a) 试验平台信号流图



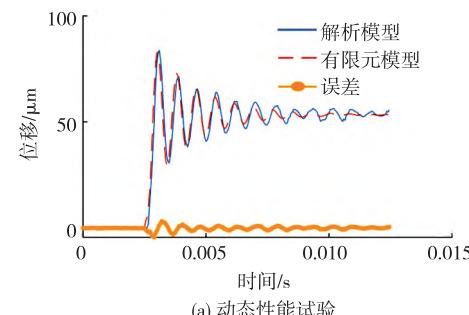
(b) 试验平台实拍图

图 5 压电双晶片执行器试验平台

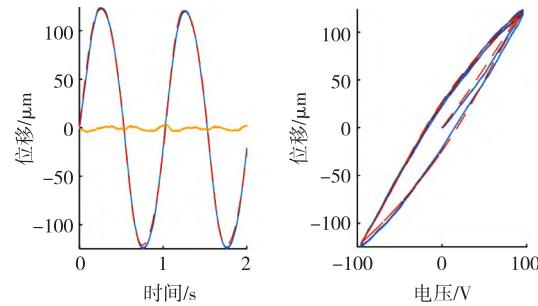
实验平台的主要设备包括:芯明天公司的 NAC2222 型压电双晶片执行器、E01.A3 型功率放大器,灵思创奇公司的 RT-Links 实时仿真机,创视智能公司的 TS-P30W 型激光位移传感器。这些设备共同组成测试系统,用于对压电双晶片执行器的性能进行精确测量和分析。测试流程如下:上位机发送控制指令至实时仿真机,实时仿真机生成电压驱动信号并将其传输至功率放大器进行放大,且与 100 V(红色信号线)和 -100 V(黑色信号线)的稳压电压共同驱动压电双晶片执行器。压电双晶片执行器在电压激励下发生形变,其悬臂梁末端的位移通过激光位移传感器进行实时测量。激光传感器精确捕捉到位移数据后被实时仿真机采集和处理,形成实验数据。

试验测试中,通过低频谐波激励下的滞环测试静态输出特性,通过阶跃激励下的动态响应测试动态输出特性。试验结果与解析模型仿真结果对比

如图 6 所示。由图可知,在静态非线性方面,试验测试与解析模型仿真迟滞分别为 19.3% 和 17.9%, 相对误差平均值为 3.5%; 在动态性能方面, 试验测试结果的上升时间为 0.9 ms, 调节时间为 5.2 ms, 解析模型仿真结果的上升时间为 0.9 ms, 调节时间为 8.9 ms。



(a) 动态性能试验



(b) 静态非线性试验时间-位移



(c) 静态非线性试验电压-位移

图 6 输出特性试验测试结果与解析模型仿真结果对比

#### 5 结束语

针对压电双晶片执行器的非线性建模问题,基于 Hammerstein 原理将压电双晶片执行器等效为悬臂梁,构建其动力学模型,提出基于 J-A 模型的非线性动态建模及参数辨识方法。由动态性能仿真/测试结果可知,理论模型与有限元模型、试验测试结果的相对误差平均值分别为 5.2%, 4.1%。由静态性能仿真/测试结果可知,理论模型、有限元模型以及试验测试结果的迟滞分别为 18.1%、17.9% 和 19.3%。本文为双晶片型压电执行器提供了一种建模与参数辨识方法。

#### 参考文献:

- [1] 凌杰, 张允执, 陈龙, 等. 数字压电叠堆执行器: 原理、建模与控制[J/OL]. (2024-09-05)[2024-06-03]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1294.TH.20240531.1807.002.html>
- [2] 蒋鑫, 朱玉川, 张洛铭. 用于共振隔膜泵的大位移压电叠堆执行器研究[J]. 压电与声光, 2023, 45(6): 833-838.

- JIANG Xin, ZHU Yuchuan, ZHANG Mingming. Research on large displacement piezoelectric stack actuators for resonant diaphragm pumps[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2023, 45(6):833-838.
- [3] 郑述峰,朱玉川,凌杰,等.轴向双压电叠堆执行器并联控制试验研究[J].北京航空航天大学学报,2023,49(6):1460-1470.
- ZHENG Shufeng, ZHU Yuchuan, LING Jie, et al. Experimental study on parallel control of axial dual piezoelectric stack actuators[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2023,49(6): 1460-1470.
- [4] 李宇阳,朱玉川,李仁强,等.双压电叠堆驱动执行器率相关迟滞建模与分析[J].压电与声光,2019,41(2): 258-264.
- LI Yuyang, ZHU Yuchuan, LI Qiang, et al. Rate-dependent hysteresis modeling and analysis of dual piezoelectric stack driven actuators [J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2019,41(2):258-264.
- [5] 朱斌,朱玉川,李宇阳,等.压电叠堆执行器迟滞建模与前馈补偿研究[J].压电与声光,2018,40(1):38-41.
- ZHU Bing, ZHU Yuchuan, LI Yuyang, et al. Research on hysteresis modeling and feedforward compensation of piezoelectric stack actuators[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2018,40(1):38-41.
- [6] NI L, CHEN J, CHEN G, et al. An explainable neural network integrating Jiles-Atherton and nonlinear auto-regressive exogenous models for modeling universal hysteresis[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2024, 136: 108904.
- [7] STIRBU R S, MITOSERIU L. Modeling of hysteretic response of porous piezo/ferroelectric ceramics [J]. Computational Materials Science, 2024, 232: 112633.
- [8] ROUZBEHI M, KAZEMPOUR A, PIRI S. Identifying the effect of the physical parameters of the Jiles-Atherton model on the hysteresis loop using the finite element method[J]. Quarterly Journal of Optoelectronic, 2023, 5(1): 119-125.
- [9] KHEMANI V, AZARIAN M H, PECHT M G. Efficient identification of Jiles-Atherton model parameters using space-filling designs and genetic algorithms[J]. Eng, 2022, 3(3): 364-372.
- [10] SCALIUKH A, SOLOVIEV A, DMITRIEVA E, et al. An optimal parameters determination for ferroelectric's polarization model[C]//[S. l.]:Engineering Systems Design and Analysis, 2010, 49163: 263-269.